

МИНОБРНАУКИ РОССИИ



Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования  
«Российский государственный гуманитарный университет»  
(ФГБОУ ВО «РГГУ»)

ИНСТИТУТ ЭКОНОМИКИ, УПРАВЛЕНИЯ И ПРАВА  
ФАКУЛЬТЕТ УПРАВЛЕНИЯ  
Кафедра моделирования в экономике и управлении

**МЕТОДЫ ОПТИМАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ**  
**РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ**

38.03.01 Экономика

---

*Код и наименование направления подготовки/специальности*

Финансы, банки, инвестиции

---

*Наименование направленности (профиля)/ специализации*

Уровень высшего образования:

*бакалавриат*

Форма обучения:

*Очная, очно-заочная*

РПД адаптирована для лиц  
с ограниченными возможностями  
здоровья и инвалидов

Москва 2023

## МЕТОДЫ ОПТИМАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ

Рабочая программа дисциплины

Составитель:

к.ф.-м.н., доцент кафедры моделирования в экономике и управлении С.А. Махов

УТВЕРЖДЕНО:

Протокол заседания кафедры моделирования в экономике и управлении

№ 06 от 13.04.2023

**ОГЛАВЛЕНИЕ**

|  |           |
|--|-----------|
| <b>1. Пояснительная записка.....</b>   | <b>5</b>  |
| 1.1 Цель и задачи дисциплины .....   | 5         |
| 1.2. Формируемые компетенции, соотнесённые с планируемыми результатами обучения по дисциплине .....                              | 5         |
| 1.3. Место дисциплины в структуре основной образовательной программы .....   | 6         |
| <b>2. Структура дисциплины.....</b>  | <b>6</b>  |
| <b>3. Содержание дисциплины .....</b>  | <b>6</b>  |
| <b>4. Образовательные и информационные технологии .....</b>  | <b>7</b>  |
| <b>5. Оценка планируемых результатов обучения.....</b>   | <b>8</b>  |
| 5.1. Система оценивания.....   | 8         |
| 5.2. Критерии выставления оценки по дисциплине.....  | 9         |
| 5.3. Оценочные средства (материалы) для текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации обучающихся по дисциплине ..... | 10        |
| <b>6. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины .....</b>  | <b>11</b> |
| 6.1. Список источников и литературы .....  | 11        |
| 6.2. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», необходимый для освоения дисциплины (модуля) .....    | 12        |
| <b>7. Материально-техническое обеспечение дисциплины.....</b>  | <b>12</b> |
| <b>8. Обеспечение образовательного процесса для лиц с ограниченными возможностями здоровья.....</b>                              | <b>13</b> |
| <b>9. Методические материалы.....</b>  | <b>14</b> |
| 9.1. Планы семинарских / практических/ занятий .....   | 14        |
| 9.2. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины.....   | 36        |
| <b>Аннотация дисциплины.....</b>   | <b>37</b> |

## 1. Пояснительная записка

### 1.1 Цель и задачи дисциплины

Цель – развить системное мышление слушателей путем детального анализа подходов к математическому моделированию и сравнительного анализа разных типов моделей.

Задачи дисциплины:

- ознакомить слушателей с математическими свойствами моделей и методов оптимизации, которые могут использоваться при анализе и решении широкого спектра экономических задач;
- выработать у слушателей навыки проведения численных исследований математических моделей и анализа результатов вычислений;
- научить выбирать наиболее перспективное управляющее решение.

### 1.2. Формируемые компетенции, соотнесённые с планируемыми результатами обучения по дисциплине

| Компетенция<br>(код и наименование)  | Индикаторы компетенций<br>(код и наименование)  | Результаты обучения  |
|--|---|--|
| ОПК-2 Способен осуществлять сбор, анализ и использование данных хозяйственного, налогового и бюджетного учетов, учетной документации, бухгалтерской(финансовой), налоговой и статистической отчетности в целях оценки эффективности и прогнозирования финансово-хозяйственной деятельности хозяйствующего субъекта, а также выявления, предупреждения, локализации и нейтрализации внутренних и внешних угроз и рисков | ОПК-2.1 Осуществляет сбор, анализ и использование данных хозяйственного, налогового и бюджетного учетов, учетной документации, бухгалтерской(финансовой), налоговой и статистической отчетности             | Знать: современные концепции и представления о социально-экономических критериях при принятии управленческих решений.<br>Уметь: выбирать рациональные варианты действий в практических задачах принятия решений с использованием экономико-математических моделей.<br>Владеть: навыками разработки решений и способами их обоснования в условиях риска и неопределенности.<br>ценности компании.                             |
|  | ОПК-2.2 Оценивает эффективность и прогнозирует финансово-хозяйственную деятельность хозяйствующего субъекта, а также выявляет, предупреждает, локализует и нейтрализует внутренние и внешние угрозы и риски | Знать: принципы применения математических методов и информационных технологий для принятия управленческих решений на хозяйственно-экономических объектах.<br>Уметь: использовать современные информационные технологии для обработки экономических данных и анализа результатов расчетов.<br>Владеть: навыками применения современного математического инструментария для решения задач социально-экономического содержания. |

### 1.3. Место дисциплины в структуре основной образовательной программы

Дисциплина «Методы оптимальных решений» относится к обязательной части математического цикла дисциплин учебного плана.

Для освоения дисциплины необходимы компетенции, сформированные в ходе изучения следующих дисциплин: «Математический анализ», «Линейная алгебра», «Экономико-математические методы и модели».

Курс «Методы оптимальных решений» завершает изучение цикла математических дисциплин.

## 2. Структура дисциплины

### Структура дисциплины для очной формы обучения

Общая трудоёмкость дисциплины составляет 3 з.е., 108 академических часов.

#### Структура дисциплины для очной формы обучения

Объем дисциплины в форме контактной работы обучающихся с педагогическими работниками и (или) лицами, привлекаемыми к реализации образовательной программы на иных условиях, при проведении учебных занятий:

| Семестр       | Тип учебных занятий | Количество часов |
|---------------|---------------------|------------------|
| <b>5</b>      | Лекции              | <b>18</b>        |
| <b>5</b>      | Семинары            | <b>24</b>        |
| <b>Всего:</b> |                     | <b>42</b>        |

Объем дисциплины в форме самостоятельной работы обучающихся составляет 66 академических часов.

### Структура дисциплины для очно-заочной формы обучения

Объем дисциплины в форме контактной работы обучающихся с педагогическими работниками и (или) лицами, привлекаемыми к реализации образовательной программы на иных условиях, при проведении учебных занятий:

| Семестр       | Тип учебных занятий | Количество часов |
|---------------|---------------------|------------------|
| <b>5</b>      | Лекции              | <b>12</b>        |
| <b>5</b>      | Семинары            | <b>12</b>        |
| <b>Всего:</b> |                     | <b>24</b>        |

Объем дисциплины в форме самостоятельной работы обучающихся составляет 84 академических часов.

## 3. Содержание дисциплины

### Тема 1. Системно-целевой подход в принятии экономических решений

Предмет и назначение курса; понятие и формальное определение системы, сложная система; системный подход исследования сложной системы; система принятия решений; понятие структуризации проблемы; фазы процесса принятия решений и их характеристика, основные понятия исследования операций. Использование математических моделей для описания поведения экономических агентов. Рациональное поведение. Использование оптимизации как способа описания рационального поведения.

Принятие экономических решений. Теория оптимизации и методы выбора экономических решений. Применение оптимизации в системах поддержки принятия решений.

### **Тема 2. Математическое программирование**

Общая постановка задачи математического программирования как задачи условной оптимизации. Целевая функция, линии уровня, система ограничений, допустимые решения, оптимальное решение. Линейные и нелинейные задачи. Общая постановка задачи линейного программирования. Стандартная и каноническая задача. Многогранник решений. Существование и единственность решения задачи линейного программирования. Представление о методах решения линейных задач: графический метод, симплекс-метод. Транспортные модели. Поставщик, потребитель, поставка; мощность, спрос, объем. Общая постановка транспортной задачи с линейной целевой функцией. Сбалансированность транспортной задачи.

### **Тема 3. Сетевые модели оптимизации**

Примеры задач на сетях. Понятие сетевого графика, его сущность и особенности, назначение и применение. Основные понятия: событие, работа, путь, полный путь, критический путь. Правила построения сетевого графика, его порядок и этапы. Алгоритм поиска критического пути. Характеристики работ и событий. Способы сокращения длительности выполнения проекта. Критерии и средства осуществления оптимизации сетевого графика.

### **Тема 4. Основные понятия многокритериальной оптимизации**

Происхождение и постановка задачи многокритериальной оптимизации. Пример: задача поиска разумных экономических решений с учетом экологических факторов. Множество достижимых векторов. Доминирование и оптимальность по Парето. Эффективные решения и паретова граница. Основные типы методов решения задач многокритериальной оптимизации. Методы аппроксимации паретовой границы. Методы последовательной оптимизации: метод главного критерия, метод последовательных уступок, метод равенства частных критериев. Методы свертки критериев: метод SMART, метод аналитической иерархии, многокритериальная полезность.

### **Тема 5. Теория игр**

Теория игр как теория обоснования экономических решений в условиях конфликта интересов; формальная модель конфликта, игроки и их функции выигрыша, коалиции действия, коалиции интересов, ходы игроков, стратегии игроков, исход конфликта. Примеры игр: модель производства продукции в условиях конкуренции, дуэльные ситуации в экономике. Классификация игр; верхняя и нижняя цена игры, седловые точки, решение игры, существование седловой точки для выпукло-вогнутых игр; примеры матричных игр, имеющих седловые точки; доминирование стратегий. Решение матричной игры в смешанных стратегиях; основная теорема матричных игр; сведение поиска решения матричной игры к решению задачи линейного программирования. Биматричные игры: равновесие, смешанные стратегии, уровни безопасности. Решение биматричной игры в смешанных стратегиях. Кооперативные биматричные игры. Множество Парето, переговорное множество, арбитраж Нэша. Кооперативные игры. Понятие дележа в кооперативной игре. Стабильные и нестабильные дележи. Ядро игры. Вектор Шепли.

## **4. Образовательные и информационные технологии**

При реализации программы дисциплины «Методы оптимальных решений» в рамках компетентностного подхода используются различные методы изложения лекционного материала в зависимости от излагаемой темы – вводная, подготовительная, установочная, проблемная лекции, лекции с разбором конкретных ситуаций и с применением техники обратной связи.

С целью активизировать работу студентов при освоении теоретического материала, изложенного на лекциях, при проведении практических занятий проводится устный и

письменный экспресс-опрос студентов по вопросам теории, практические занятия по итогам тематических разделов проводятся в виде консультаций и коллоквиумов.

Самостоятельная работа студентов направлена на закрепление полученных навыков и для приобретения новых теоретических и фактических знаний, выполняется в читальном зале библиотеки и в домашних условиях, подкрепляется учебно-методическим и информационным обеспечением (учебники, учебно-методические пособия, конспекты лекций).

Для активизации образовательной деятельности с целью формирования и развития профессиональных навыков обучающихся, используются формы проблемного, контекстного, индивидуального и междисциплинарного обучения, case-study анализ, информационные технологии, анализ реальных проблемных ситуаций. Практикуется опережающая самостоятельная работа для изучения прикладных задач. По итогам каждой лабораторной работы студенты выполняют задания, которые являются отчетной формой по лабораторным работам.

В традиционных формах обучения 50 % занятий, в активных формах обучения 50 %.

## 5. Оценка планируемых результатов обучения

### 5.1. Система оценивания

Общая оценка успеваемости студента по предмету выставляется за совокупный результат:

- активного участия студента в практических занятиях (максимальное количество баллов – 10);
- качества выполнения практических заданий (максимальное количество баллов – 50);
- качества усвоения лекционного материала в ходе изложения курса (2 письменных экспресс-опроса по 10 баллов максимально каждый);
- коллоквиума (максимальное количество баллов – 20).

Промежуточная форма контроля для очной, очно-заочной и заочной форм обучения – *зачет с оценкой*.

Студент аттестуется положительно по дисциплине «Методы оптимальных решений» и получает оценку «удовлетворительно», если он набирает 50-67 баллов, оценку «хорошо» – 68-82 баллов и «отлично» – 83-100 баллов.

Полученный совокупный результат (максимум 100 баллов) конвертируется в традиционную шкалу оценок и в шкалу оценок Европейской системы переноса и накопления кредитов (European Credit Transfer System; далее – ECTS) в соответствии с таблицей:

| 100-балльная шкала | Традиционная шкала  |            | Шкала ECTS |
|--------------------|---------------------|------------|------------|
| 95 – 100           | отлично             | зачтено    | A          |
| 83 – 94            |                     |            | B          |
| 68 – 82            | хорошо              |            | C          |
| 56 – 67            | удовлетворительно   |            | D          |
| 50 – 55            |                     |            | E          |
| 20 – 49            | неудовлетворительно | не зачтено | FX         |
| 0 – 19             |                     |            | F          |

## 5.2. Критерии выставления оценки по дисциплине

| Баллы/<br>Шкала<br>ECTS | Оценка по<br>дисциплине               | Критерии оценки результатов обучения по<br>дисциплине   |
|-------------------------|---------------------------------------|---|
| 100-83/<br>А,В          | «зачтено<br>(отлично)»                | <p>Выставляется обучающемуся, если он глубоко и прочно усвоил теоретический и практический материал, может продемонстрировать это на занятиях и в ходе промежуточной аттестации.</p> <p>Обучающийся исчерпывающе и логически стройно излагает учебный материал, умеет увязывать теорию с практикой, справляется с решением задач профессиональной направленности высокого уровня сложности, правильно обосновывает принятые решения.</p> <p>Свободно ориентируется в учебной и профессиональной литературе.</p> <p>Оценка по дисциплине выставляется обучающемуся с учётом результатов текущей и промежуточной аттестации.</p> <p>Компетенции, закреплённые за дисциплиной, сформированы на уровне – «высокий».</p> |
| 82-68/<br>С             | «зачтено<br>(хорошо)»                 | <p>Выставляется обучающемуся, если он знает теоретический и практический материал, грамотно и по существу излагает его на занятиях и в ходе промежуточной аттестации, не допуская существенных неточностей.</p> <p>Обучающийся правильно применяет теоретические положения при решении практических задач профессиональной направленности разного уровня сложности, владеет необходимыми для этого навыками и приёмами.</p> <p>Достаточно хорошо ориентируется в учебной и профессиональной литературе.</p> <p>Оценка по дисциплине выставляется обучающемуся с учётом результатов текущей и промежуточной аттестации.</p> <p>Компетенции, закреплённые за дисциплиной, сформированы на уровне – «хороший».</p>     |
| 67-50/<br>D,E           | «зачтено<br>(удовлетвори-<br>тельно)» | <p>Выставляется обучающемуся, если он знает на базовом уровне теоретический и практический материал, допускает отдельные ошибки при его изложении на занятиях и в ходе промежуточной аттестации.</p> <p>Обучающийся испытывает определённые затруднения в применении теоретических положений при решении практических задач профессиональной направленности стандартного уровня сложности, владеет необходимыми для этого базовыми навыками и приёмами.</p> <p>Демонстрирует достаточный уровень знания учебной литературы по дисциплине.</p>   |



| Баллы/<br>Шкала<br>ECTS | Оценка по<br>дисциплине              | Критерии оценки результатов обучения по<br>дисциплине  |
|-------------------------|--------------------------------------|--|
|                         |                                      | Оценка по дисциплине выставляются обучающемуся с учётом результатов текущей и промежуточной аттестации.<br>Компетенции, закреплённые за дисциплиной, сформированы на уровне – «достаточный».   |
| 49-0/<br>F,FX           | «неудовлетворительно»/<br>не зачтено | Выставляется обучающемуся, если он не знает на базовом уровне теоретический и практический материал, допускает грубые ошибки при его изложении на занятиях и в ходе промежуточной аттестации.<br>Обучающийся испытывает серьёзные затруднения в применении теоретических положений при решении практических задач профессиональной направленности стандартного уровня сложности, не владеет необходимыми для этого навыками и приёмами.<br>Демонстрирует фрагментарные знания учебной литературы по дисциплине.<br>Оценка по дисциплине выставляются обучающемуся с учётом результатов текущей и промежуточной аттестации.<br>Компетенции на уровне «достаточный», закреплённые за дисциплиной, не сформированы. |

### 5.3. Оценочные средства (материалы) для текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации обучающихся по дисциплине

Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности.

По итогам изучения каждой темы проводятся устные и письменные экспресс-опросы в рамках контрольных вопросов по курсу.

#### *Контрольные вопросы по курсу*

1. Что такое инструментальные переменные и параметры математической модели? В чем состоит их отличие?
2. Что такое допустимое множество?
3. Что такое критерий оптимизации и целевая функция?
4. Что такое линии уровня целевой функции?
5. Дайте формулировку детерминированной статической задачи оптимизации.
6. Назовите причины неопределенности в параметрах математической модели и объясните ее влияние на решение.
7. Приведите примеры использования математических моделей для описания поведения экономических агентов.
8. Что такое рациональное поведение с точки зрения теории оптимизации?
9. Как методы оптимизации используются при принятии экономических решений?
10. Что такое глобальный экстремум критерия и оптимальное решение?
11. Назовите причины отсутствия оптимального решения.
12. Что такое локальный экстремум?

13. Общая постановка задачи математического программирования.
14. Общая постановка задачи линейного программирования.
15. Содержательные примеры, приводящие к задаче линейного программирования.
16. Стандартная и каноническая форма задачи линейного программирования.
17. Многогранник решений, угловые точки.
18. Теорема о достижимости оптимального решения задачи линейного программирования.
19. Сбалансированная и несбалансированная транспортная задача.
20. Сетевая модель: определение, основные понятия.
21. Узлы, ребра, дуги. Ориентированные и неориентированные графы.
22. Задача календарного планирования работ. Правила составления сетевого графика.
23. Событие, работа, полный путь, критический путь.
24. Упорядочение и расчет сетевых графиков.
25. Нахождение критического пути.
26. Временные параметры событий и работ.
27. Оптимизация сетевых графиков по методу «время-стоимость».
28. Сформулируйте постановку задачи многокритериальной оптимизации.
29. Что такое множество достижимых критериальных векторов?
30. Дайте определение доминирования и оптимальности по Парето.
31. Что такое эффективные решения и паретова граница.
32. Назовите основные подходы к построению методов поиска решений в задачах многокритериальной оптимизации.
33. Методы последовательной оптимизации: метод главного критерия, метод последовательных уступок, метод равенства частных критериев.
34. Метод аналитической иерархии.
35. Теория игр как теория обоснования экономических решений в условиях конфликта интересов.
36. Формальная модель конфликта, игроки и их функции выигрыша, коалиции действия, коалиции интересов, ходы игроков, стратегии игроков, исход конфликта.
37. Примеры игр: модель производства продукции в условиях конкуренции, дуэльные ситуации в экономике.
38. Классификация игр.
39. Верхняя и нижняя цена игры, седловые точки, решение игры.
40. Примеры матричных игр, имеющих седловые точки; доминирование стратегий.
41. Решение матричной игры в смешанных стратегиях.
42. Основная теорема матричных игр.
43. Сведение поиска решения матричной игры к решению задачи линейного программирования.
44. Биматричные игры. Равновесие, смешанные стратегии, уровни безопасности.
45. Кооперативные биматричные игры. Множество Парето, переговорное множество.
46. Арбитраж Нэша.
47. Кооперативные игры, общие понятия: коалиция, функция выигрыша.
48. Формальное определение кооперативной игры.
49. Понятие дележа в кооперативной игре. Стабильные и нестабильные дележи.
50. Ядро игры. Пример игры, имеющей ядро.
51. Значение игры по Шепли. Пример решения задачи с его помощью.

## **6. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины**

### **6.1. Список источников и литературы**

*Основная литература*

1. Исследование операций в экономике (под ред. Н. Ш. Кремера). М.: Издательство Юрайт, 2014. Издание 3-е.
2. Таха Х. У. Введение в исследование операций. М.: Издательский дом «Вильямс», 2005. Издание 7-е.
3. Ларичев О. И. Теория и методы принятия решений. М.: Университетская книга, Логос, 2008. Издание 3-е.
4. Писарук Н. Н. Введение в теорию игр. – Минск: БГУ, 2014.
5. Орлова И. В. Экономико-математические методы и модели (Выполнение расчетов в среде Excel): учебное пособие. – М.: АО «Финстатинформ», 2000.

#### *Дополнительная литература*

1. Шикин Е. В., Шикина Г. Е. Исследование операций: учебник. М.: ТК Велби, Изд-во Проспект, 2006.
2. Малыхин В. И. Математическое моделирование экономики. – М.: УРСС, ЛЕНАНД, 2014.
3. Эддоус М., Стэнфилд Р. Методы принятия решений. – М.: Аудит, ЮНИТИ, 1997.
4. Шимко П. Д. Оптимальное управление экономическими системами: учебное пособие. – СПб.: ИД Бизнес-пресса, 2004.
5. Вентцель Е. С. Исследование операций. Задачи, принципы, методология. М.: Высшая школа, 2001.
6. Садовин Н. С., Садовина Т. Н. Основы теории игр: учебное пособие. – Йошкар-Ола: Марийский государственный университет, 2011.
7. Токарев В. В., Соколов А. В. Методы оптимальных решений. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2011.
8. Саати Т., Кернс К. Аналитическое планирование. Организация систем. – М. Радио и Связь, 1991.
9. Райфа Г. Анализ решений. М.: Наука, 1977.
10. Канторович Л. В., Горстко А. Б. Оптимальные решения в экономике. – М.: Наука, 1972.

#### **6.2. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», необходимый для освоения дисциплины (модуля)**

1. Колемаев В. А., Соловьев В. И., Карандаев И. С., Малыхин В. И. и др. Практикум по исследованию операций в экономике: Учебное пособие для вузов / Под ред. В. А. Колемаева и В. И. Соловьева. – М.: Вега-Инфо, 2010. — 196 с. Режим доступа: [http://visoloviev.ru/viewpage.php?page\\_id=24](http://visoloviev.ru/viewpage.php?page_id=24).
2. Соловьев В. И. Методы оптимальных решений: Учебное пособие. М.: Финансовый университет, 2012. 364 с. Режим доступа: [http://visoloviev.ru/viewpage.php?page\\_id=42](http://visoloviev.ru/viewpage.php?page_id=42), <http://visoloviev.ru/booksmath/MOS.pdf>.

### **7. Материально-техническое обеспечение дисциплины**

Для проведения лекций необходима аудитория соответствующих размеров, оборудованная проектором. Для проведения лабораторных работ – специально оборудованные кабинеты и аудитории: компьютерные классы, аудитории, оборудованные мультимедийными средствами обучения.

## **8. Обеспечение образовательного процесса для лиц с ограниченными возможностями здоровья**

В ходе реализации дисциплины используются следующие дополнительные методы обучения, текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации обучающихся в зависимости от их индивидуальных особенностей:

- для слепых и слабовидящих: лекции оформляются в виде электронного документа, доступного с помощью компьютера со специализированным программным обеспечением; письменные задания выполняются на компьютере со специализированным программным обеспечением или могут быть заменены устным ответом; обеспечивается индивидуальное равномерное освещение не менее 300 люкс; для выполнения задания при необходимости предоставляется увеличивающее устройство; возможно также использование собственных увеличивающих устройств; письменные задания оформляются увеличенным шрифтом; экзамен и зачёт проводятся в устной форме или выполняются в письменной форме на компьютере.

- для глухих и слабослышащих: лекции оформляются в виде электронного документа, либо предоставляется звукоусиливающая аппаратура индивидуального пользования; письменные задания выполняются на компьютере в письменной форме; экзамен и зачёт проводятся в письменной форме на компьютере; возможно проведение в форме тестирования.

- для лиц с нарушениями опорно-двигательного аппарата: лекции оформляются в виде электронного документа, доступного с помощью компьютера со специализированным программным обеспечением; письменные задания выполняются на компьютере со специализированным программным обеспечением; экзамен и зачёт проводятся в устной форме или выполняются в письменной форме на компьютере.

При необходимости предусматривается увеличение времени для подготовки ответа.

Процедура проведения промежуточной аттестации для обучающихся устанавливается с учётом их индивидуальных психофизических особенностей. Промежуточная аттестация может проводиться в несколько этапов.

При проведении процедуры оценивания результатов обучения предусматривается использование технических средств, необходимых в связи с индивидуальными особенностями обучающихся. Эти средства могут быть предоставлены университетом, или могут использоваться собственные технические средства.

Проведение процедуры оценивания результатов обучения допускается с использованием дистанционных образовательных технологий.

Обеспечивается доступ к информационным и библиографическим ресурсам в сети Интернет для каждого обучающегося в формах, адаптированных к ограничениям их здоровья и восприятия информации:

- для слепых и слабовидящих: в печатной форме увеличенным шрифтом, в форме электронного документа, в форме аудиофайла.

- для глухих и слабослышащих: в печатной форме, в форме электронного документа.

- для обучающихся с нарушениями опорно-двигательного аппарата: в печатной форме, в форме электронного документа, в форме аудиофайла.

Учебные аудитории для всех видов контактной и самостоятельной работы, научная библиотека и иные помещения для обучения оснащены специальным оборудованием и учебными местами с техническими средствами обучения:

- для слепых и слабовидящих: устройством для сканирования и чтения с камерой SARA CE; дисплеем Брайля PAC Mate 20; принтером Брайля EmBraille ViewPlus;

- для глухих и слабослышащих: автоматизированным рабочим местом для людей с нарушением слуха и слабослышащих; акустический усилитель и колонки;

• для обучающихся с нарушениями опорно-двигательного аппарата: передвижными, регулируемые эргономическими партами СИ-1; компьютерной техникой со специальным программным обеспечением.

## 9. Методические материалы

### 9.1. Планы семинарских / практических/ занятий

| № п/п | № раздела дисциплины | Наименование лабораторных работ                |
|-------|----------------------|--|
| 1     | 1                    | Решение задач математического программирования |
| 2     | 2                    | Решение сетевых моделей                        |
| 3     | 3                    | Решение задач многокритериальной оптимизации   |
| 4     | 4                    | Метод аналитической иерархии                   |
| 5     | 5                    | Решение матричных игр                          |
|       | <b>Итого</b>         |  |

#### Практическое занятие №1

**Тема:** Решение задач математического программирования (4 часа).

**Цель:** углубление теоретических знаний и приобретение практических навыков в области динамического программирования, как способа решения сложных задач путём разбиения их на более простые.

**Форма проведения** – практическое занятие.

#### Методические указания

При решении многих экономических задач и других задач наиболее полный и точный учет зависимостей между факторами и показателями, влияющими на критерий эффективности и ограничения, приводит к построению нелинейных экономико-математических моделей. Например, при формировании оптимальной производственной программы предприятия по критерию затрат учитывается себестоимость единицы продукции, которая уменьшается при увеличении объема выпускаемой продукции и приводит к нелинейному критерию эффективности.

В математических моделях нелинейных оптимизационных задач, называемых задачами нелинейного программирования, целевая функция и ограничения являются нелинейными функциями. Модель остается нелинейной и в случае если только целевая функция нелинейна, а ограничения – линейны, или наоборот – хотя бы одно из ограничений нелинейно, а целевая функция линейна.

В общем виде, математическая модель нелинейной задачи программирования формулируется следующим образом. Необходимо найти такой вектор  $n$  неизвестных  $x = (x_1, \dots, x_n)$ , который доставляет максимум (или минимум) целевой функции  $f(x_1, \dots, x_n)$ , т.е.

$$f(x_1, \dots, x_n) \rightarrow \max (\min)$$

и удовлетворяет системе ограничений

$$g_i(x_1, \dots, x_n) \leq b_i, \quad i = 1, \dots, k$$

$$g_j(x_1, \dots, x_n) = b_j, \quad j = k + 1, \dots, n$$

В отличие от задач линейного программирования, для задач нелинейного программирования не существует общего метода, позволяющего решать любые оптимизационные нелинейные задачи. Это обусловлено тем, что в задачах нелинейного программирования область допустимых решений может быть невыпуклой, а целевая

функция может достигать экстремума не только на границе, но и внутри области допустимых решений системы ограничений. Кроме того, нелинейная целевая функция может иметь несколько локальных экстремумов, среди которых необходимо найти глобальный. В общем случае, ни один из существующих методов не гарантирует определение глобального экстремума.

Вместе с тем, некоторые типы задач нелинейного программирования хорошо изучены и для них существуют методы определения глобального экстремума. К таким задачам можно отнести классические задачи оптимизации без ограничений или с ограничениями-равенствами, у которых отсутствуют условия неотрицательности и дискретности переменных, целевая функция и функции в ограничениях непрерывны, имеют непрерывные частные производные по крайней мере второго порядка.

Особое место среди задач нелинейного программирования занимают выпуклые задачи, у которых область допустимых ограничений и целевая функция являются выпуклыми или вогнутыми. К таким задачам относятся, в частности, задачи квадратичного программирования, для которых характерно то, что целевая функция и/или ограничения являются функциями своих аргументов, в степени не выше второй. Наиболее важной характеристикой выпуклых (вогнутых) моделей нелинейного программирования является то, что для них локальный экстремум обязательно является и глобальным экстремумом.

Ниже рассматриваются только выпуклые (вогнутые) задачи нелинейного программирования.

### Пример решения задачи нелинейного программирования с использованием Excel.

**Задача.** Предприятие может выпускать два вида продукции ( $j = 1, 2$ ). На ее изготовление расходуется три вида ресурсов ( $i = 1, 2, 3$ ). С учетом брака расход ресурсов на единицу производимой продукции  $j$ -го вида определяется выражением  $a_{ij} + k_{ij}x_j$ , а прибыль в зависимости от объемов производства равна  $p_j + l_j x_j$ , где  $x_j$  – искомый объем производства продукции  $j$ -го вида;  $a_{ij}$  – норма расхода  $i$ -го ресурса на производство единицы продукции  $j$ -го вида;  $k_{ij}$  – коэффициент изменения расхода соответствующего ресурса с учетом выпуска бракованных изделий;  $p_j$  – прибыль от реализации единицы продукции  $j$ -го вида;  $l_j$  – коэффициент изменения прибыли, влияющий на объем производства продукции  $j$ -го вида. Требуется найти такие объемы производства продукции, при которых прибыль была бы максимальной.

Численные исходные данные приведены в таблице:

| Ресурс                        | Нормы расхода ресурсов<br>( $a_{ij}$ ) на продукцию вида $j$ |      | Запас ресурса | Коэффициент изменения норм расхода ресурсов<br>( $k_{ij}$ ) на продукцию вида $j$ |      |
|-------------------------------|--|------|---------------|---|------|
|                               | 1  | 2    |               | 1   | 2    |
| 1                             | 15   | 18   | 1350          | 0,1   | 0,05 |
| 2                             | 12   | 16   | 1400          | 0,2   | 0,2  |
| 3                             | 17   | 14   | 1580          | 0,1   | 0,15 |
| Прибыль за ед. продукции      | 100  | 120  |               |   |      |
| Коэффициент изменения прибыли | -0,08  | -0,1 |               |   |      |

**Математическая модель**

Целевая функция, которую необходимо максимизировать равна

$$(100 - 0,08x_1)x_1 + (120 - 0,1x_2)x_2 \rightarrow \max$$

Максимум целевой функции находится при ограничениях

$$(15 + 0,1x_1)x_1 + (18 + 0,05x_2)x_2 \leq 1350$$

$$(12 + 0,2x_1)x_1 + (16 + 0,2x_2)x_2 \leq 1400$$

$$(17 + 0,1x_1)x_1 + (14 + 0,15x_2)x_2 \leq 1580$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0$$

Математическую модель приведем к виду, пригодному для использования в Excel. После раскрытия скобок получаем

$$100x_1 - 0,08x_1^2 + 120x_2 - 0,1x_2^2 \rightarrow \max$$

$$15x_1 + 0,1x_1^2 + 18x_2 + 0,05x_2^2 \leq 1350$$

$$12x_1 + 0,2x_1^2 + 16x_2 + 0,2x_2^2 \leq 1400$$

$$17x_1 + 0,1x_1^2 + 14x_2 + 0,15x_2^2 \leq 1580$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0$$

**Решения задачи средствами Microsoft Excel**

Вызовите Microsoft Excel.

**1. Введение математической модели в электронную таблицу Excel**

Введите математическую модель в ячейки электронной таблицы Excel, так как показано на рис. 1.

|   | А               | В                 | С                | Д            | Е | Ф                   | Г |
|---|-----------------|-------------------|------------------|--------------|---|---------------------|---|
| 1 |                 | Ограничения       |                  | Правая часть |   | Формула ограничений |   |
| 2 |                 | x1                | x2               |              |   |                     |   |
| 3 |                 | =15*B7+0,1*B7^2   | =18*C7+0,05*C7^2 | 1350         |   | =СУММ(B3;C3)        |   |
| 4 |                 | =12*B7+0,2*B7^2   | =16*C7+0,2*C7^2  | 1400         |   | =СУММ(B4;C4)        |   |
| 5 |                 | =17*B7+0,1*B7^2   | =14*C7+0,15*C7^2 | 1580         |   | =СУММ(B5;C5)        |   |
| 6 | Целевая функция | =100*B7-0,08*B7^2 | =120*C7-0,1*C7^2 |              |   | =СУММ(B6;C6)        |   |
| 7 | Переменные      |                   |                  |              |   |                     |   |

Рис. 1. Задание математической модели

В ячейки В3:В6 занесены формулы, отражающие слагаемые ограничений в левых частях и в целевой функции, содержащие переменные  $x_1$  и  $x_2$ .

Для изменяемых переменных, т.е. переменных  $x_1$  и  $x_2$ , которые необходимо определить, отведены ячейки В7, С7.

Поясним суть выражения в ячейке В3. В первом ограничении два первых слагаемых имеют вид  $15x_1 + 0,1x_1^2$ . Под значение изменяемой переменной  $x_1$  отведена ячейка В7, поэтому в ячейку В3 занесено выражение  $15*B7 + 0,1*B7^2$ . Аналогично занесены выражения и в другие ячейки.

В ячейках F3:F6 представлены формулы для подсчета расхода ресурсов на производство продукции в объемах  $x_1$  и  $x_2$ . Так как на производство продукции первого вида в объеме  $x_1$  расходуется первого ресурса  $15*B7 + 0,1*B7^2$ , а на производство

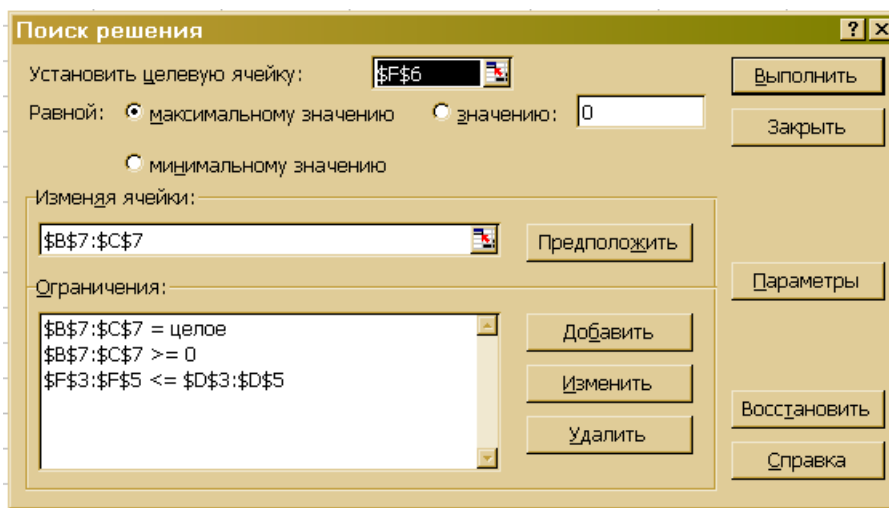


Рис. 2. Диалоговое окно Поиск решения

продукции второго вида в объеме  $x_2$  расходуется того же ресурса  $18 \cdot C_7 + 0,05 \cdot C_7^2$  и эти величины находятся в ячейках B3 и C3, то суммарный расход первого ресурса занесен в ячейку F3, что отражено формулой  $=\text{СУММ}(B3;C3)$ . Аналогично занесены формулы в ячейки F4 и F5. В ячейку F6 занесена суммарная прибыль от производства продукции (целевая функция).

В ячейки D3:D5 занесены запасы ресурсов.

## 2. Определение оптимального решения с помощью надстройки Поиск решения

Поставить курсор мыши на формулу для расчета целевой функции, которая содержится в ячейке F6.

В меню **Сервис** командой **Поиск решения** открываем диалоговое окно **Поиск решения** и заносим в него (рис. 2):

- адрес ячейки целевой функции F6,
- отмечаем пункт максимизировать,
- адреса изменяемых переменных в ячейках B7, C7,
- ограничения и требование целочисленности. Последнее требование задавать не нужно, если по смыслу задачи, переменные могут быть и не целыми числами. В данной задаче объемы производства измеряются в целых единицах, поэтому вводится требование целочисленности.

Нажать на панели **Поиск решения** кнопку **Параметры**. В диалоговом окне **Параметры поиска решения** (рис. 3) установим флажки **Неотрицательные значения**, **Автоматическое масштабирование**, **сопряженных градиентов** (выбранный метод решения задачи) и щелкнув левой кнопкой мыши по ОК, возвратимся в диалоговое окно **Поиск решения**. В этом окне, щелкнув кнопкой мыши по команде **Выполнить**, получим оптимальное решение задачи (рис. 4).



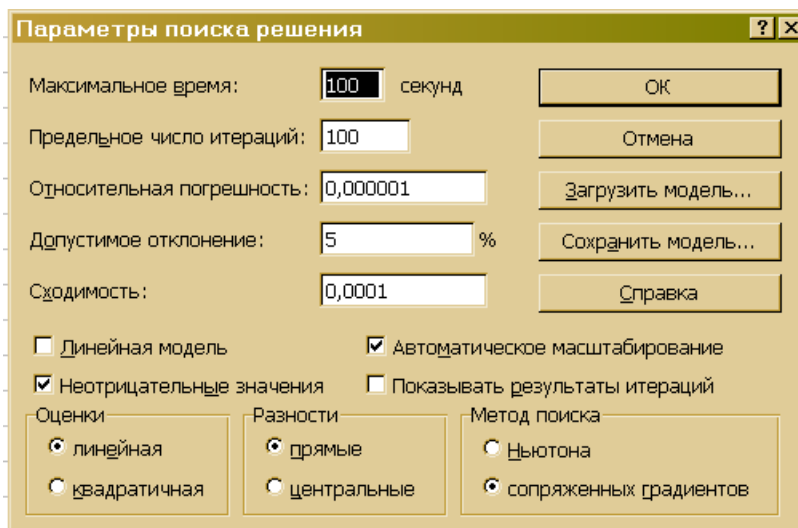


Рис. 3. Диалоговое окно Параметры поиск решения

В ячейках В7 и С7 представлены искомые объемы производства продукции  $x_1 = 32$  и  $x_2 = 35$ . Суммарная максимальная прибыль равная 7195,58 представлена в ячейке F6. В ячейках F3:F5 находится информация о суммарном расходе ресурсов при производстве оптимального количества продукции. В ячейках В3:В5 и С3:С5 находится информация о расходе ресурсов затрачиваемых на производство продукции первого и второго вида соответственно.

Рис. 4. Результаты поиска оптимального решения задачи

### Примеры задач математического программирования

**Задача №1.** Завод выпускает изделия двух типов А и В. При этом используется сырье четырех видов. Расход сырья каждого вида на изготовление единицы продукции и запасы сырья заданы в таблице

| Изделия      | Сырье |   |   |    |
|--------------|-------|---|---|----|
|              | 1     | 2 | 3 | 4  |
| А            | 2     | 1 | 0 | 2  |
| В            | 3     | 0 | 1 | 1  |
| Запасы сырья | 21    | 4 | 6 | 10 |

Выпуск изделия А приносит прибыль 3 денежные единицы, В - 2 денежные единицы. Составить план производства, обеспечивающий максимальную прибыль.

**Задача №2.** Фирме требуется уголь с содержанием фосфора не более 0,03 % и с примесью пепла не более 3,25 %. Доступны три сорта угля А, В, С по следующим ценам (за 1 т):

| Сорт угля | Содержание примеси фосфора, % | Содержание примеси золы, % | Цена, дол. |
|-----------|-------------------------------|----------------------------|------------|
| А         | 0,06                          | 2,0                        | 30         |
| В         | 0,04                          | 4,0                        | 30         |
| С         | 0,02                          | 3,0                        | 45         |

Как их следует смешать, чтобы удовлетворить ограничениям на примеси и минимизировать цену?

**Задача №3.** Фирма производит три вида продукции (А, В, С), для выпуска каждого из которых требуется определенное время обработки на всех четырех устройствах I, II, III, IV.

| Вид продукции | Время обработки, в часах |    |     |    | Прибыль, дол. |
|---------------|--------------------------|----|-----|----|---------------|
|               | I                        | II | III | IV |               |
| А             | 1                        | 3  | 1   | 2  | 3             |
| В             | 6                        | 1  | 3   | 3  | 6             |
| С             | 3                        | 3  | 2   | 4  | 4             |

Пусть время работы на устройствах - соответственно 84, 42, 21 и 42 ч. Определите, какую продукцию и в каких количествах следует производить.

**Задача №4.** Фирма выпускает продукцию четырех типов Продукт №1, Продукт №2, Продукт №3, Продукт №4, для изготовления требуются ресурсы трех видов: трудовые, сырье, финансы. Количество ресурса каждого вида, необходимое для выпуска единицы продукции данного типа, называется нормой расхода. Норма расхода, а также прибыль, получаемая от реализации единицы каждого типа продукции, приведены, а табл., там же приведено наличие располагаемого ресурса. Требуется определить, в каком количестве надо выпускать продукцию каждого типа, чтобы суммарная прибыль была максимальной.

| Ресурсы  | Продукт №1 | Продукт №2 | Продукт №3 | Продукт №4 | Наличие |
|----------|------------|------------|------------|------------|---------|
| Трудовые | 1          | 1          | 1          | 1          | 16      |
| Сырье    | 6          | 5          | 4          | 3          | 110     |
| Финансы  | 4          | 6          | 10         | 13         | 100     |
| Прибыль  | 60         | 70         | 120        | 130        |         |

**Задача №5.** Предприятию требуется изготовить некоторое количество сплава, содержащего не менее 15 компонент олова, 55 компонент цинка и 30 компонент свинца. Требуемый сплав изготавливается из трех исходных сплавов, в которых содержатся выше указанные составляющие. Данные о содержании олова, цинка и свинца в исходных материалах приведены в таблице, там же задана стоимость единицы каждого сплава. Следует определить, какие из исходных сплавов и в каких количествах нужно использовать для получения требуемого сплава, чтобы суммарные затраты на исходные сплавы были минимальные.

| Составляющие | Количество компонент составляющих в исходных материалах |          |          | Необходимое количество компонент в сплаве |
|--------------|---|----------|----------|---|
|              | Сплав №1  | Сплав №2 | Сплав №3 |   |
| Свинец       | 40  | 25       | 30       | 30  |
| Цинк         | 40  | 50       | 30       | 55  |
| Олово        | 10  | 30       | 20       | 15  |
| Цена единицы | 40  | 30       | 70       | —   |

|                  |  |  |  |  |
|------------------|--|--|--|--|
| материала (руб.) |  |  |  |  |
|------------------|--|--|--|--|

**Задача №6.** Сталеплавильная компания располагает тремя заводами  $M1$ ,  $M2$ ,  $M3$ , способными произвести за некоторый промежуток времени 50, 30 и 20 тыс. т стали соответственно. Свою продукцию компания поставляет четырем потребителям  $C1$ ,  $C2$ ,  $C3$  и  $C4$ , потребности которых составляют соответственно 12, 15, 25 и 36 тыс. т стали. Стоимости производства и транспортировки 1 тыс. т стали с различных заводов различным потребителям приведены ниже:

| Потребитель | Завод |    |    |
|-------------|-------|----|----|
|             | M1    | M2 | M3 |
| C1          | 15    | 19 | 14 |
| C2          | 19    | 18 | 16 |
| C3          | 19    | 18 | 20 |
| C4          | 15    | 19 | 18 |

Определите минимальные общую стоимость, объемы производства на каждом заводе и планы перевозок.

**Задача №7.** Компания контролирует три фабрики  $F1$ ,  $F2$ , и  $F3$ , способные произвести 50, 25 и 25 тыс. изделий еженедельно. Она заключила договоры с четырьмя заказчиками  $C1$ ,  $C2$ ,  $C3$  и  $C4$ , которым требуется еженедельно 15, 20, 20 и 30 тыс. изделий. Стоимости производства и транспортировки 1 тыс. изделий заказчикам с фабрик приведены ниже:

| Фабрика | Заказчик |    |    |    |
|---------|----------|----|----|----|
|         | C1       | C2 | C3 | C4 |
| F1      | 13       | 17 | 17 | 14 |
| F2      | 18       | 16 | 16 | 18 |
| F3      | 12       | 14 | 19 | 17 |

Определите минимизирующие общую стоимость, объемы производства и распределения для каждой фабрики.

**Задача №8.** Компания владеет двумя фабриками  $F1$  и  $F2$ , производящими электронное оборудование. Фабрики в течение некоторого периода выпускает 16 и 12 тыс. изделий соответственно при нормальных темпах производства. При сверхурочной работе эти показатели могут быть повышены соответственно до 20 и 14 тыс. изделий. Дополнительная стоимость производства 1000 изделий в сверхурочное время на  $F1$  и на  $F2$  составляет 8 единиц. Компания снабжает трех потребителей  $C1$ ,  $C2$  и  $C3$ , потребности которых в течение одного и того же периода составляют соответственно 10, 13 и 7 тыс. изделий. Стоимости перевозок 1 тыс. изделий потребителю с фабрик приведены в таблице:

| Фабрика | Потребитель |    |    |
|---------|-------------|----|----|
|         | C1          | C2 | C3 |
| F1      | 5           | 4  | 6  |
| F2      | 6           | 3  | 2  |

Сформулируйте задачу нахождения оптимальных планов производства и распределения как транспортную и найдите ее решение.

**Задача №9.** Фирма предложила владельцам трех авиалиний перевозить бригады специалистов в различные части света. Стоимость перевозок в фунтах стерлингов приведена в таблице:

| Авиалиния | Сидней | Калькутта | Бейрут | Даллас | Сан-Паулу |
|-----------|--------|-----------|--------|--------|-----------|
| I         | 24     | 16        | 8      | 10     | 14        |
| II        | 21     | 15        | 7      | 12     | 16        |
| III       | 23     | 14        | 7      | 14     | 12        |

Администрация фирмы решила, что индивидуальные контракты на перевозку будут заключаться с владельцами авиалинии I, II, III в отношении 2:3:2, и уведомила об этом управляющего транспортными перевозками, а также известила его о том, что из 70 намеченных на следующий год перевозок 10 – в Сидней, 15 – в Калькутту, 20 – в Бейрут, 10 – в Даллас и 15 – в Сан-Паулу.

Как ему следует распределить индивидуальные контракты на перевозки для минимизации общей стоимости при условии удовлетворения запросов администрации фирмы? Какова минимальная стоимость перевозок, удовлетворяющих приведенным выше ограничениям?

**Задача №10.** Четыре сталелитейных завода I, II, III и IV производят еженедельно соответственно 950, 300, 1350 и 450 т стали определенного сорта. Стальные болванки должны быть переданы потребителям A, B, C, D, E, еженедельные запросы которых составляют соответственно 250, 1000, 700, 650 и 450 т стали.

Стоимость транспортировки от заводов к потребителям в тоннах приведена в таблице:

| Завод | Потребитель |    |    |    |    |
|-------|-------------|----|----|----|----|
|       | A           | B  | C  | D  | E  |
| I     | 12          | 16 | 21 | 19 | 32 |
| II    | 4           | 4  | 9  | 5  | 24 |
| III   | 3           | 8  | 14 | 10 | 26 |
| IV    | 24          | 33 | 36 | 34 | 49 |

Составить план распределения стальных болванок, чтобы минимизировать общую стоимость.

**Задача №11.** Компания владеет тремя заводами A, B, C. Соответствующие стоимости производства равны 26, 23 и 22 на единицу, объем производства 6000, 3000 и 3000 единиц. Компания обязалась поставлять соответственно 1500, 2500, 2700 и 3300 единиц в города W, X, Y, Z. При заданных стоимостях перевозок составьте оптимальные планы производства и распределения.

| Город | Стоимость транспортировки, центы |   |   |
|-------|----------------------------------|---|---|
|       | A                                | B | C |
| W     | 1                                | 9 | 6 |
| X     | 4                                | 2 | 1 |
| Y     | 1                                | 2 | 7 |
| Z     | 9                                | 8 | 3 |

**Задание.**

1. Построить математическую модель задачи.
2. Решить задачу средствами Microsoft Excel.
3. Дать интерпретацию полученному решению.

## Практическое занятие №2

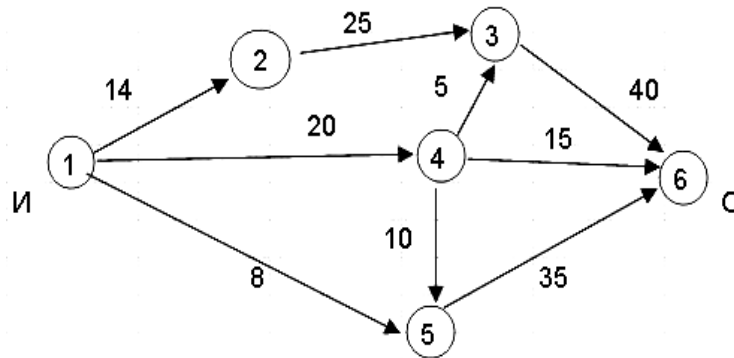
**Тема: Решение сетевых моделей (4 часа).**

**Цель:** приобретение практических навыков постановки и решения сетевых задач.

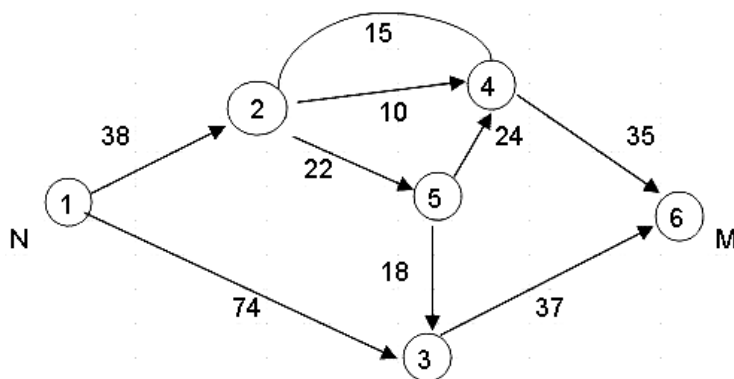
**Форма проведения** – практическое занятие.

### Примеры задач, решаемых с использованием сетевых моделей

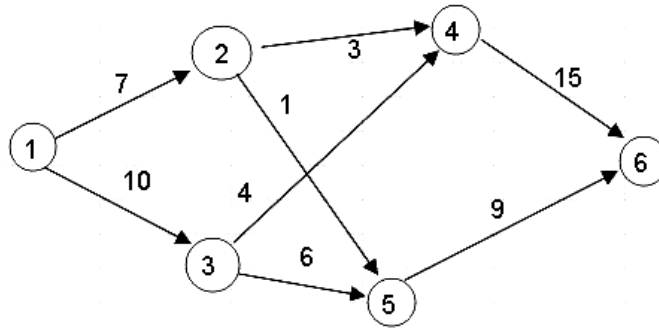
1. Поток автомобилей проходит по городской уличной сети (см. рисунок), состоящей из площадей И и С, а также перекрестков (узлы сети) и улиц (дуги сети). Каждая дуга характеризуется разрешенным направлением движения (показаны стрелками) и максимальной величиной пропускной способности потока автомобилей, равной наибольшему числу автомобилей, которые могут быть пропущены по улице в минуту (показаны числами над дугами). Составить математическую модель, определяющую число автомобилей, проходящих по каждой улице, при котором полный автомобильный поток в уличной сети между площадями И и С будет максимальным.



2. Автомобилисту необходимо проехать из города N в город M по соединяющей эти города сети автодорог (см. рисунок). Узлы сети моделируют населенные пункты, дуги – участки дорожной сети. Разрешенные направления движения показаны стрелками, а расстояния (км) между городами и населенными пунктами – числами над дугами. Составить математическую модель, определяющую кратчайший маршрут между двумя городами N и M.



3. Сетевой график Проекта, выражающий взаимосвязанную последовательность выполнения работ, приведен на рисунке. Работы по проекту начинаются в узле 1 и заканчиваются в узле 6. Узлы сети моделируют моменты начала и окончания работ по проекту, дуги – работы, числа над дугами – продолжительность выполнения работ. Составить математическую модель, определяющую критический путь сетевого графика, т.е. последовательность работ от начала проекта до его окончания, имеющую наибольшую общую продолжительность.

**Задания.**

1. Построить математическую модель задачи.
2. Решить задачу средствами Microsoft Excel.
3. Дать интерпретацию полученному решению.

**Практическое занятие №3****Тема: Решение задач многокритериальной оптимизации (4 часа)**

**Цель работы:** Исследование задач многокритериальной оптимизации как математической модели принятия оптимальных решений по нескольким критериям.

**Форма проведения** – практическое занятие.

**Методические указания**

Основная трудность принятия решений в условиях определенности связана с наличием нескольких критериев. В этом случае возникает необходимость в формировании некоторого компромиссного векторного критерия.

Пусть имеется совокупность критериев:

$$F_1(\bar{x}), F_2(\bar{x}), \dots, F_n(\bar{x}),$$

которые необходимо максимизировать, и  $\bar{x}$  принадлежит допустимой области  $X$ .

Если все критерии измеряются в одной шкале, то компромиссный критерий можно записать в виде взвешенной суммы критериев:

$$F_0(\bar{x}) = \sum_{i=1}^n w_i F_i(\bar{x}), \quad (1.1)$$

где  $w_i$  – вес соответствующего критерия. В этом случае необходимо найти

$$\max_{x \in X} F_0(\bar{x}) = \max_{x \in X} \sum_{i=1}^n w_i F_i(\bar{x}). \quad (1.2)$$

Если же критерии измеряются в различных шкалах, то необходимо привести их к единой шкале. Для этого критерий может быть сформирован в следующем виде:

$$\min_{x \in X} F_0(\bar{x}) = \min_{x \in X} \sum_{i=1}^n w_i \frac{F_i^{\max} - F_i(\bar{x})}{|F_i^{\max}|}, \quad (1.3)$$

где  $F_i^{\max} = \max_{x \in X} F_i(\bar{x})$  и  $F_i^{\max} \neq 0$ . В этом случае требуется минимизировать величину

отклонения каждого критерия от его оптимального значения. При таком формировании обобщенного критерия можно добиться высоких показателей по одним критериям за счет ухудшения показателей по другим.

На некоторые частные критерии могут быть наложены ограничения

$$F_i(\bar{x}) \geq F_{i\text{доп}}. \quad (1.4)$$

Тогда исходная многокритериальная задача может быть преобразована к виду (1.1) или (1.3) с дополнением системы ограничением вида (1.4).

Решение многокритериальных задач зависит от выбора весовых коэффициентов. Для лица, принимающего решения, важно уметь не только решать многокритериальные задачи, но и сравнивать полученные решения между собой с целью выделения наиболее оптимальных. Одним из критериев сравнения может быть критерий Парето.

Решение называется оптимальным по *Парето*, если не существует никакого другого решения, улучшающего значение одного из критериев и неухудшающего значения остальных критериев. Так как Парето-оптимальное решение может быть не единственным, то возникает понятие Парето-оптимального множества решений.

При определении Парето-оптимального множества полезно изобразить на графике изменения допустимых значений критериев. Так, в одномерном случае, когда критерии зависят от одной переменной (см. рис. 1), Парето-оптимальное множество состоит из одной точки, соответствующей максимальным значениям критериев, а на рис. 2. Парето-оптимальным является все множество решений.

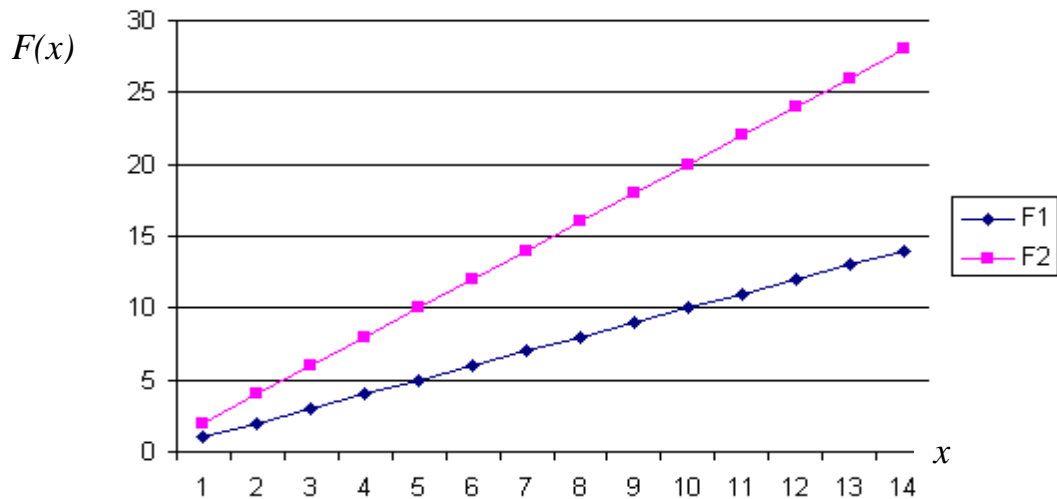


Рис. 1. Значения критериев F1 и F2.  
(Парето-оптимальное множество – одна точка)

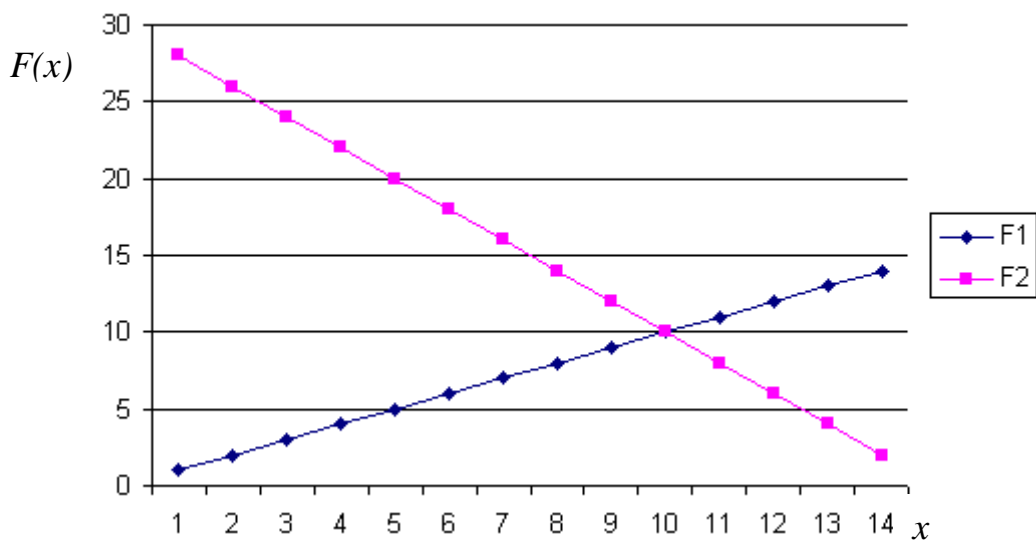


Рис. 2. Значения критериев F1 и F2.  
(Парето-оптимальное множество – все возможные решения)

В случае, когда критерии зависят более, чем от одной переменной удобно изобразить множество значений критериев в координатах  $F_1$  и  $F_2$  (рис. 3). Если критерии  $F_1$  и  $F_2$  необходимо максимизировать, то Парето-оптимальным множеством является граница области допустимых значений, отмеченная на рис. 2.3 фигурной скобкой.

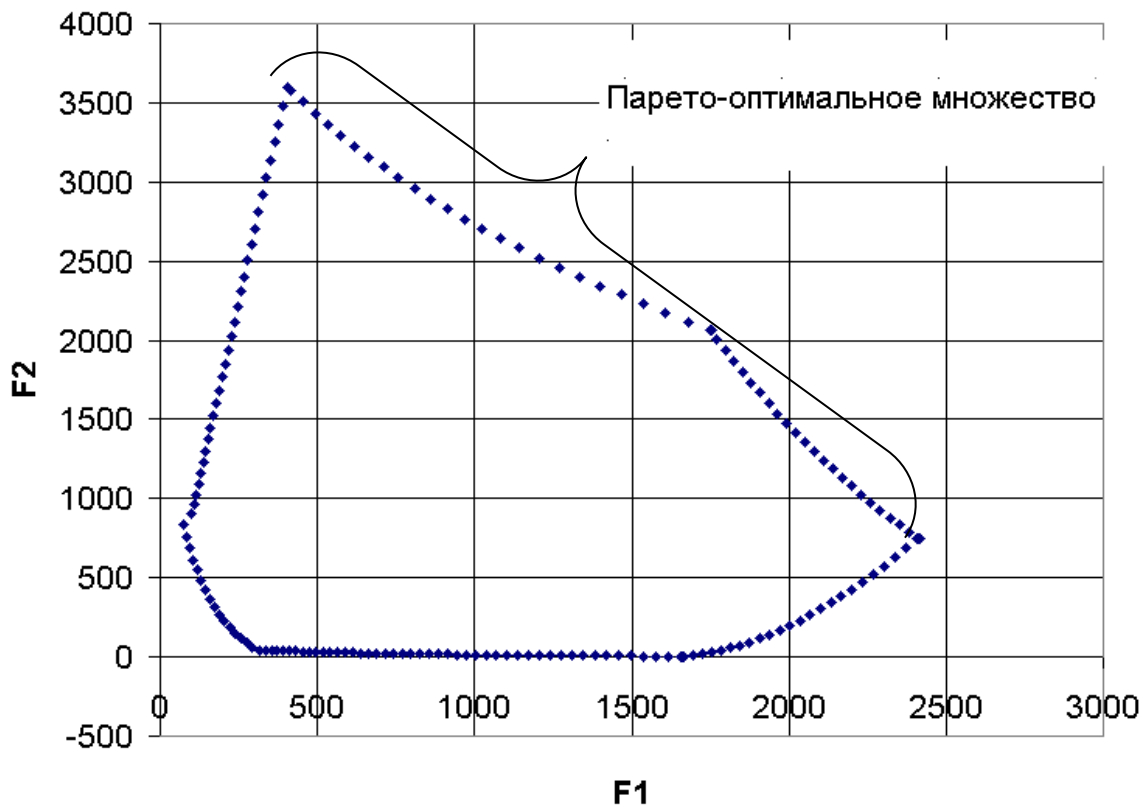


Рис. 3. Нахождение Парето-оптимального множества в координатах критериев  $F_1$  и  $F_2$ .

### Порядок выполнения работы

1. Определить тип компромиссного критерия (1.1) или (1.3), который необходимо использовать для решения варианта задания.
2. Используя программное обеспечение решения задач линейного и нелинейного программирования, исследовать влияние весовых коэффициентов  $w_i$  на оптимальное компромиссное решение.
3. Изобразить множество допустимых значений критериев в координатах  $F_i$ ,  $F_j$  в соответствии с вариантом задания. Найти Парето-оптимальное множество решений.

### Варианты заданий.

**1.** Плановое задание по изготовлению 4 видов костюмов необходимо распределить между 3 швейными фабриками. Производственные мощности  $i$ -й фабрики ( $i=1,2,3$ ) позволяют за рассматриваемый период времени выпустить  $r_{ij}$  костюмов  $j$ -й модели ( $j=1,2,3,4$ ). При этом, если все производственные мощности фабрики идут на производство костюмов одного типа, то костюмы других видов производиться не могут. Заданы цены  $c_j$  на костюм  $j$ -й модели и себестоимости  $s_{ij}$  изготовления  $j$ -й модели на  $i$ -й фабрике.



$$R = \begin{bmatrix} 20 & 240 & 300 & 150 \\ 240 & 300 & 200 & 300 \\ 150 & 240 & 300 & 200 \end{bmatrix},$$

$$S = \begin{bmatrix} 400 & 400 & 500 & 200 \\ 250 & 300 & 250 & 400 \\ 400 & 500 & 400 & 300 \end{bmatrix},$$

$$C = [500 \quad 650 \quad 800 \quad 500].$$

Необходимо решить многокритериальную задачу.

Критерий 1. Максимизация прибыли.

Критерий 2. Максимизация количества комплектов. Комплект состоит из 18 костюмов первого вида, 15 костюмов второго вида и по 10 костюмов третьего и четвертого видов.

2. Три вида деталей можно производить на станках разных типов без переналадки. Мощность станков, ограничение на рабочее время и себестоимость в рублях одной детали каждого вида указаны в следующей таблице:

| Вид деталей | Производительность станков (деталей в час) |       | Себестоимость деталей |
|-------------|--|-------|-----------------------|
|             | 1 тип                                      | 2 тип |                       |
| 1           | 20   | 45    | 8                     |
| 2           | 30   | 20    | 6                     |
| 3           | 50   | 60    | 0,5                   |

Фонд рабочего времени для станков составляет соответственно 12 и 8 часов.

Необходимо решить многокритериальную задачу.

Критерий 1. Максимизация количества комплектов. Комплект состоит из 16 деталей первого вида, 12 деталей второго вида и 24 детали третьего вида.

Критерий 2. Максимизация себестоимости.

3. Нефтеперерабатывающий завод получает 4 различных полуфабриката: 400 тыс. л алкилата, 250 тыс. л крекинг-бензина, 350 тыс. л бензина прямой перегонки и 100 тыс. л изопентона. В результате смешивания этих четырех компонентов в разных пропорциях образуются три сорта авиационного бензина: бензин А 2:3:5:2, бензин Б - 3:1:2:1 и бензин С - 2:2:1:3. Стоимость 1 тыс. л. указанных сортов бензина характеризуется числами 12000 руб., 10000 руб., 15000 руб.

Необходимо решить многокритериальную задачу.

Критерий 1. Максимизация стоимости всей продукции.

Критерий 2. Минимизация остатков полуфабрикатов.

4. Полуфабрикаты поступают на предприятие в виде листов фанеры. Всего имеется две партии материала, причем первая партия содержит 400 листов, а вторая 250 листов фанеры. Из поступающих листов фанеры необходимо изготовить комплекты двух видов. Комплект первого вида включает 4 детали 1-го типа, 3 детали 2-го типа и 2 детали 3-го

типа. Комплект второго вида включает 2 детали 1-го типа, 4 детали 2-го типа и 3 детали 3-го типа. Лист фанеры каждой партии может раскраиваться различными способами.

Количество деталей каждого типа, которое получается при раскрое одного листа соответствующей партии по тому или иному способу раскроя, представлено в следующей таблице.

Стоимость одного листа первой партии составляет 1000 руб., а стоимость одного листа второй партии – 1200 руб. Цена комплекта первого вида составляет 150 руб., цена комплекта второго вида – 200 руб.

| Детали | Способ раскроя<br>(1 п) |    |   | Детали | Способ раскроя<br>(2 п) |   |
|--------|-------------------------|----|---|--------|-------------------------|---|
|        | 1                       | 2  | 3 |        | 1                       | 2 |
| 1      | 0                       | 6  | 9 | 1      | 6                       | 5 |
| 2      | 4                       | 3  | 4 | 2      | 5                       | 4 |
| 3      | 10                      | 16 | 0 | 3      | 8                       | 0 |

Необходимо решить многокритериальную задачу.

Критерий 1. Максимизация прибыли от продажи всех комплектов деталей.

Критерий 2. Максимизация количества комплектов первого вида.

Критерий 3. Максимизация количества комплектов второго вида.

Примечание: для построения Парето-оптимального множества рассмотреть только критерии 2,3.

**5.** На фабрике производится продукты двух типов. Для производства используются станки трех типов, два типа сырья, квалифицированная и неквалифицированная рабочая сила.

Сырье. Для производства одной единицы первого продукта требуется одна единица сырья первого типа и семь единиц сырья второго типа. Для производства одной единицы второго продукта требуется три единицы сырья первого типа и пять единиц сырья второго типа.

Станки. Станок первого типа имеет ресурс мощности  $3 \cdot 10^6$ , второго типа –  $1 \cdot 10^6$ , третьего типа –  $3 \cdot 10^5$ . При производстве первого продукта используется 0.5 единиц ресурса мощности станка первого типа, 0.2 единицы ресурса мощности станка второго типа и 0.025 единиц ресурса мощности станка третьего типа. При производстве второго продукта используется 2 единицы ресурса мощности станка первого типа, 0.5 единиц ресурса мощности станка второго типа и 0.1 единица ресурса мощности станка третьего типа.

Персонал. Бригада из одного квалифицированного рабочего и восьми неквалифицированных рабочих может выпустить  $1.5 \cdot 10^5$  единиц первого продукта. Бригада из двух квалифицированных рабочих и 11-ти неквалифицированных рабочих может выпустить  $4 \cdot 10^4$  единиц второго продукта.

Стоимость одной единицы сырья первого типа 1 руб., второго типа – 0.15 руб. Стоимость одного станка первого типа  $8 \cdot 10^6$  руб., станка второго типа –  $7 \cdot 10^6$  руб., станка третьего типа –  $9 \cdot 10^6$  руб. Амортизационные отчисления составляют 5 % от стоимости станка. Заработная плата квалифицированных рабочих  $6.25 \cdot 10^3$  руб., неквалифицированных –  $4 \cdot 10^3$  руб.

Цена первого продукта составляет 3.5 руб., второго – 12.5 руб.

Считается, что имеется неограниченное количество сырья. В наличии имеется 5 станков первого типа, 5 – второго типа, 3 – третьего типа. Максимальное число квалифицированных рабочих – 360, неквалифицированных – 2500. Платежеспособный спрос на первый продукт составляет  $2.2 \cdot 10^7$  руб., на второй продукт –  $2.7 \cdot 10^7$  руб.

Необходимо решить многокритериальную задачу.

Критерий 1. Максимизация стоимости продукции.

Критерий 2. Максимизация количества комплектов. Комплект состоит из 15 продуктов первого типа и 5 продуктов второго типа.

6. Четыре нефтеперерабатывающих завода с ежедневной производительностью 4, 6, 10 и 10 млн. тонн бензина снабжают пять бензохранилищ, ежедневная потребность которых составляет 7, 7, 7, 7 и 2 млн. тонн бензина соответственно. Стоимость транспортировки составляет 0.3 руб. за 1000 тонн на один км между заводами и хранилищами. Расстояние между заводами и хранилищами в км приведено в следующей таблице.

| Заводы                | Хранилища |     |     |     |     | Объем |
|-----------------------|-----------|-----|-----|-----|-----|-------|
|                       | 1         | 2   | 3   | 4   | 5   |       |
| 1                     | 160       | 300 | 170 | 100 | 160 | 4     |
| 2                     | 300       | 270 | 260 | 90  | 230 | 6     |
| 3                     | 130       | 40  | 220 | 30  | 100 | 10    |
| 4                     | 30        | 100 | 50  | 40  | 240 | 10    |
| Вместимость хранилища | 7         | 7   | 7   | 7   | 2   | 30    |

Время (в часах), затрачиваемое на транспортировку бензина, приведено в следующей таблице.

| Заводы | Хранилища |   |   |   |   |
|--------|-----------|---|---|---|---|
|        | 1         | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 1      | 3         | 5 | 1 | 8 | 2 |
| 2      | 4         | 5 | 3 | 7 | 2 |
| 3      | 4         | 9 | 3 | 6 | 4 |
| 4      | 1         | 2 | 1 | 5 | 7 |

Найти оптимальную схему транспортировки бензина, решая многокритериальную задачу.

Критерий 1. Минимизация стоимости транспортировки бензина.

Критерий 2. Минимизация **общего** времени, затрачиваемого на транспортировку бензина из всех заводов во все хранилища.

7. Четыре распределительных центра поставляют автомобили пяти дилерам. Автомобили от распределительных центров к дилерам перевозятся на трейлерах, и стоимость перевозки пропорциональна расстоянию между пунктами отправления и назначения и не зависят от степени загрузки трейлера. В таблице приведены расстояния между распределительными центрами и дилерами, а также соответствующие величины спроса и предложения, выраженные в количествах автомобилей. При полной загрузке трейлер вмещает 18 автомобилей. Транспортные расходы составляют 25 рублей за один км пути, пройденного трейлером.

| Центры | Дилеры |     |     |     |     | Предложения |
|--------|--------|-----|-----|-----|-----|-------------|
|        | 1      | 2   | 3   | 4   | 5   |             |
| 1      | 100    | 150 | 200 | 140 | 35  | 239         |
| 2      | 50     | 70  | 60  | 65  | 80  | 119         |
| 3      | 40     | 90  | 100 | 150 | 130 | 181         |

|       |     |     |     |     |     |     |
|-------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| 4     | 170 | 50  | 110 | 230 | 100 | 161 |
| Спрос | 111 | 131 | 259 | 98  | 101 | 700 |

Найти оптимальную схему транспортировки автомобилей, решая многокритериальную задачу.

Критерий 1. Максимизация общей загрузки трейлеров.

Критерий 2. Минимизация суммарной стоимости транспортировки автомобилей.

8. Четыре пекарни осуществляют ежедневные поставки хлеба для пяти магазинов. В таблице представлена информация о спросе на продукцию, ее наличии и транспортных издержках:

| Пекарни               | Транспортные издержки, руб./кг |             |             |             |             | Предложение |
|-----------------------|--------------------------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|
|                       | 1-й магазин                    | 2-й магазин | 3-й магазин | 4-й магазин | 5-й магазин |             |
| А                     | 0,9                            | 1,7         | 2,9         | 2,8         | 0,8         | 200         |
| В                     | 1,3                            | 2,1         | 2,7         | 1,6         | 2,9         | 300         |
| С                     | 2,0                            | 3,0         | 2,4         | 0,7         | 2,6         | 200         |
| Д                     | 1,1                            | 1,9         | 3,0         | 0,6         | 0,2         | 200         |
| Потребность магазинов | 100                            | 200         | 150         | 100         | 300         | 850 900     |

Время (в часах), затрачиваемое на транспортировку хлеба, приведено в следующей таблице.

| Пекарни | Магазины |     |     |     |     |
|---------|----------|-----|-----|-----|-----|
|         | 1        | 2   | 3   | 4   | 5   |
| 1       | 1,2      | 0,7 | 0,9 | 0,8 | 1,8 |
| 2       | 0,3      | 1,5 | 0,5 | 0,8 | 1,2 |
| 3       | 0,2      | 1,7 | 0,4 | 1,4 | 0,6 |
| 4       | 0,8      | 1,4 | 0,4 | 1,6 | 0,8 |

Найти оптимальную схему транспортировки хлеба, решая многокритериальную задачу.

Критерий 1. Минимизация стоимости транспортировки.

Критерий 2. Минимизация **общего** времени, затрачиваемого на транспортировку хлеба из всех пекарней во все магазины.

9. Четыре лесозаготовочных предприятия осуществляют поставки леса пяти деревообрабатывающим заводам. Лес перевозят на лесовозах, и стоимость перевозки пропорциональна расстоянию между пунктами отправления и назначения и не зависят от степени загрузки лесовоза. В таблице приведены расстояния между лесозаготовочными предприятиями и деревообрабатывающими заводами, а также соответствующие величины спроса и предложения, выраженные в куб. м. При полной загрузке лесовоз вмещает 16 куб. м. Транспортные расходы составляют 30 рублей за один км пути, пройденного лесовозом.

| Лесозагот. предприятия | Деревообрабатывающие заводы |     |     |     |     | Предложения |
|------------------------|-----------------------------|-----|-----|-----|-----|-------------|
|                        | 1                           | 2   | 3   | 4   | 5   |             |
| 1                      | 160                         | 300 | 170 | 100 | 160 | 700         |
| 2                      | 300                         | 270 | 260 | 90  | 230 | 650         |

|       |     |     |     |     |     |      |
|-------|-----|-----|-----|-----|-----|------|
| 3     | 130 | 40  | 220 | 30  | 100 | 700  |
| 4     | 30  | 100 | 50  | 40  | 240 | 520  |
| Спрос | 400 | 500 | 350 | 900 | 420 | 2570 |

Найти оптимальную схему транспортировки леса, решая многокритериальную задачу.

Критерий 1. Максимизация общей загрузки лесовозов.

Критерий 2. Минимизация суммарной стоимости транспортировки леса.

**10.** Четыре фермерских хозяйства осуществляют поставки зерна пяти мелькомбинатам. Зерно от фермерских хозяйств к мелькомбинатам перевозится на грузовых машинах вместимостью 2,5 тонны. Стоимость перевозки пропорциональна расстоянию между пунктами отправления и назначения и не зависит от степени загрузки машины. В таблице приведены расстояния в км между фермерскими хозяйствами и мелькомбинатами, а также соответствующие величины спроса и предложения, выраженные в тоннах. Транспортные расходы составляют 23 рубля за один км пути, пройденного одной грузовой машиной.

| Фермерские хозяйства | Мелькомбинаты |     |     |     |     | Предложения |
|----------------------|---------------|-----|-----|-----|-----|-------------|
|                      | 1             | 2   | 3   | 4   | 5   |             |
| 1                    | 80            | 170 | 290 | 280 | 80  | 22          |
| 2                    | 130           | 210 | 170 | 160 | 290 | 13          |
| 3                    | 200           | 250 | 240 | 70  | 240 | 17          |
| 4                    | 110           | 190 | 300 | 60  | 20  | 18          |
| Спрос                | 3             | 13  | 7   | 7   | 40  | 70          |

Найти оптимальную схему транспортировки зерна, решая многокритериальную задачу.

Критерий 1. Максимизация общей загрузки грузовиков.

Критерий 2. Минимизация суммарной стоимости транспортировки зерна.

**11.** Сотовая компания собирается строить новую базовую станцию в области, где имеется 10 населенных пунктов с координатами X и Y. Уровень сигнала от базовой станции уменьшается пропорционально квадрату расстояния до населенного пункта.

| Населенный пункт | X  | Y  | Число жителей |
|------------------|----|----|---------------|
| 1                | 10 | 15 | 52            |
| 2                | 3  | 6  | 104           |
| 3                | 5  | 25 | 30000         |
| 4                | 17 | 4  | 110           |
| 5                | 9  | 10 | 26            |
| 6                | 15 | 7  | 315           |
| 7                | 6  | 18 | 754           |
| 8                | 1  | 3  | 1267          |
| 9                | 12 | 8  | 1999          |
| 10               | 18 | 4  | 516           |

Расходы на установку базовой станции внутри населенных пунктов приведены в следующей таблице. Стоимость установки одной базовой станции вне населенных пунктов составляет 63 тыс. у.е.

| Населенный пункт | Расходы на установку базовой станции, тыс. у.е. |
|------------------|---|
| 1                | 10  |
| 2                | 7   |
| 3                | 14  |
| 4                | 17  |
| 5                | 9   |
| 6                | 15  |
| 7                | 6   |
| 8                | 10  |
| 9                | 12  |
| 10               | 18  |

Необходимо решить многокритериальную задачу.

Критерий 1. Минимизация взвешенной суммы квадратов расстояний до населенных пунктов с учетом числа жителей в каждом населенном пункте.

Критерий 2. Минимизация стоимости установки базовой станции.

### Содержание отчета

Отчет должен содержать: титульный лист; цель работы; задание; математическую постановку задачи, результаты численных экспериментов; графическую иллюстрацию анализа; траектории изменения целевых функций многокритериальной задачи в зависимости от весовых коэффициентов; график допустимых значений критериев и Парето-оптимальное множество решений; выводы.

### Контрольные вопросы

1. Примеры многокритериальных задач.
2. Решение многокритериальных задач, когда критерии измеряются в одной шкале.
3. Решение многокритериальных задач, когда критерии измеряются в различных шкалах.
4. Определение Парето-оптимального множества решений.
5. Метод последовательных уступок.

### Практическое занятие №4

**Тема: Метод аналитической иерархии (4 часа).**

**Цель:** приобретение практических навыков постановки и решения задач принятия решений с помощью метода аналитической иерархии.

**Форма проведения** – практическое занятие.

*Пример. Выбор площадки для строительства аэропорта.*

Комиссия по выбору места постройки аэропорта предварительно отобрала из нескольких возможных три варианта: А, В, К. Тогда структура решаемой задачи может быть представлена в виде, показанном ниже.

#### Цели

Цель строительства аэропорта: прием и отправка большого числа пассажиров.

#### Критерии

- 1) Стоимость строительства;
- 2) Время в пути от аэропорта до центра города;
- 3) Количество людей, подвергающихся шумовым воздействием.

#### Альтернативы

- 1) Площадка А;
- 2) Площадка В;
- 3) Площадка К.

Далее происходят попарные сравнения элементов каждого уровня. Результаты словесных сравнений переводятся в числа с помощью следующей шкалы относительной важности.

| <i>Уровень важности</i>                | <i>Количественное значение</i> |
|--|--------------------------------|
| Равная важность                        | 1                              |
| Умеренное превосходство                | 3                              |
| Существенное или сильное превосходство | 5                              |
| Значительное (большое) превосходство   | 7                              |
| Очень большое превосходство            | 9                              |

При сравнении элементов, принадлежащих одному уровню иерархии, ЛПР выражает свое мнение, используя одно из приведенных в таблице определений. В матрицу сравнения заносится соответствующее число. Матрица сравнений критериев выбора площадки для аэропорта приведена в следующей таблице.

*Матрица сравнений для критериев*

| Критерии  | $C_1$<br>Стоимость | $C_2$ Время в<br>пути до<br>центра<br>города | $C_3$ Количество<br>людей,<br>подвергающих<br>ся шумовым<br>воздействиям | Собственн<br>ый вектор | Вес<br>критерия |
|---|--------------------|--|--|------------------------|-----------------|
| $C_1$ Стоимость   | 1                  | 5  | 3  | 2,47                   | 0,65            |
| $C_2$ Время в пути<br>до центра города                                  | 1/5                | 1  | 3  | 0,848                  | 0,22            |
| $C_3$ Количество<br>людей,<br>подвергающихся<br>шумовым<br>воздействиям | 1/3                | 1/3  | 1  | 0,48                   | 0,13            |

Матрица соответствует следующим предпочтениям гипотетического ЛПР: критерий «Стоимость» существенно превосходит критерий «Время в пути» и умеренно превосходит критерий «Количество людей, подвергающихся шумовым воздействиям»; критерий  $C_2$  умеренно превосходит критерий  $C_3$ . В графе " Собственный вектор" вычисление проходит по формуле: извлекается корень 3-й степени (3 – размерность матрицы сравнений) из произведений элементов каждой строки (т.е. находится их среднее геометрическое). После чего эти числа нормируются на единицу, результат заносится в последний столбец " Вес критерия".

Следующим шагом сравниваются заданные альтернативы (конкретные площадки) по каждому критерию отдельно – аналогично выше написанному. См. эти сравнения в следующих трех таблицах.

*Относительная важность альтернатив по отдельным критериям*

По критерию  $C_1$  (Стоимость)

| Альтернатива | А   | В | К | Собственный<br>вектор | Вес  |
|--------------|-----|---|---|-----------------------|------|
| А            | 1   | 7 | 3 | 2,76                  | 0,69 |
| В            | 1/7 | 1 | 3 | 0,755                 | 0,19 |

|   |     |     |   |      |      |
|---|-----|-----|---|------|------|
| К | 1/3 | 1/3 | 1 | 0,48 | 0,12 |
|---|-----|-----|---|------|------|

По критерию  $C_2$  (Время в пути до центра города)

|   |   |     |     |      |      |
|---|---|-----|-----|------|------|
| А | 1 | 1/7 | 1/5 | 0,31 | 0,07 |
| В | 7 | 1   | 3   | 2,76 | 0,65 |
| К | 5 | 1/3 | 1   | 1,18 | 0,28 |

По критерию  $C_3$  (Количество людей, подвергающихся шумовым воздействиям)

|   |     |   |     |      |      |
|---|-----|---|-----|------|------|
| А | 1   | 5 | 5   | 2,93 | 0,68 |
| В | 1/5 | 1 | 1/5 | 0,34 | 0,09 |
| К | 1/5 | 5 | 1   | 1    | 0,23 |

Найденные по таблицам коэффициенты важности (веса) позволяют свернуть критерии в один и найти наилучшую альтернативу по формуле:

$$S_j = \sum_{i=1}^3 w_i V_{ji},$$

где  $S_j$  — показатель качества  $j$ -й альтернативы;  $w_i$  — вес  $i$ -го критерия;  $V_{ji}$  — важность  $j$ -й альтернативы по  $i$ -му критерию.

Для трех площадок проведенные вычисления позволяют определить:

$$S(A) = 0,65 \cdot 0,69 + 0,22 \cdot 0,07 + 0,13 \cdot 0,68 = 0,552;$$

$$S(B) = 0,65 \cdot 0,19 + 0,22 \cdot 0,65 + 0,13 \cdot 0,09 = 0,278;$$

$$S(K) = 0,65 \cdot 0,12 + 0,22 \cdot 0,28 + 0,13 \cdot 0,23 = 0,17.$$

Итак, альтернатива А оказалась лучшей.

Последним шагом осуществляется проверка согласованности суждений ЛПР. При заполнении матриц попарных сравнений человек может делать ошибки. Одной из возможных ошибок является нарушение транзитивности: из  $a_{ij} > a_{jk}$ ,  $a_{jk} > a_{is}$  может не следовать  $a_{ij} > a_{is}$  ( $a_{ij}$  — элементы матрицы попарных сравнений). Во-вторых, возможны нарушения согласованности численных суждений:  $a_{ij} \cdot a_{jk} \neq a_{ik}$ . Для обнаружения несогласованности предложен подсчет индекса согласованности сравнений, осуществляемый по матрице парных сравнений. Изложим алгоритм этого подсчета.

1. В матрице парных сравнений суммируются элементы каждого столбца.
2. Сумма элементов каждого столбца умножается на соответствующие нормализованные компоненты вектора весов, определенного из этой же матрицы.
3. Полученные числа суммируются, значение суммы обозначаем как  $\lambda_{\max}$ .
4. Находим индекс согласованности

$$L = \frac{\lambda_{\max} - n}{n - 1},$$

где  $n$  — число сравниваемых элементов (размер матрицы). Заметим, что для кососимметрической матрицы  $\lambda > n$ .

5. Подсчитывается среднее значение индекса согласованности  $R$  для кососимметричных матриц, заполненных случайным образом. Так, для матрицы размера  $n = 7$  индекс  $R = 1,32$ , а для матрицы размера  $n = 8$  индекс  $R = 1,41$  (см. таблицу).

Среднее значение индекса согласованности в зависимости от размера матрицы:

|     |   |   |     |      |      |      |      |      |      |      |      |
|-----|---|---|-----|------|------|------|------|------|------|------|------|
| $n$ | 1 | 2 | 3   | 4    | 5    | 6    | 7    | 8    | 9    | 10   | 11   |
| $R$ | 0 | 0 | 0,5 | 0,90 | 1,12 | 1,24 | 1,32 | 1,41 | 1,45 | 1,49 | 1,51 |

6. Вычисляется отношение согласованности:

$$T = \frac{L}{R}.$$



При применении метода желательным считается уровень  $T < 0,1$ . Если значение  $T$  превышает этот уровень, рекомендуется провести сравнения заново.

*Задание.* Самостоятельно решить аналогичную задачу. Представить отчет в виде презентации.

### Практическое занятие №5

**Тема:** Решение матричных игр (4 часа).

**Цель работы.** Ознакомиться с методами решения задач матричных игр методами линейного программирования.

**Форма проведения** – практическое занятие.

#### Методические указания

Матричная игра представляет собой антагонистическую игру двух лиц с платежной матрицей  $A_{m \times n}$ , с  $m$  возможными стратегиями первого игрока и  $n$  стратегиями второго игрока. Первый игрок стремится максимизировать выигрыш, второй – минимизировать проигрыш. Если матрица игры имеет седловую точку, т.е. существует элемент, являющийся максимальным в столбце и минимальным в строке, то игра имеет решение в чистых стратегиях. В противном случае игра имеет решение в смешанных стратегиях, которые представляют собой вероятностные распределения на множестве чистых стратегий:

$\bar{x} = (x_1, \dots, x_m)^T$  – смешанная стратегия первого игрока,  $\sum_{i=1}^m x_i = 1$ ;

$\bar{y} = (y_1, \dots, y_n)^T$ , – смешанная стратегия второго игрока,  $\sum_{i=1}^n y_i = 1$ .

Использование в игре оптимальных смешанных стратегий обеспечивает первому игроку выигрыш, не меньший, чем при использовании им любой другой стратегии; второму игроку – проигрыш не больший, чем при использовании им любой другой стратегии.

С точки зрения 1-го игрока игру можно записать как задачу линейного программирования

$$\begin{aligned} V &\rightarrow \max ; \\ \sum_{i=1}^m x_i a_{ij} &\geq V, \quad j = 1, \dots, n ; \\ \sum_{i=1}^m x_i &= 1, \quad x_i \geq 0; \quad i = 1, \dots, m ; \end{aligned}$$

где значение игры  $V$  рассматривается как  $m+1$ -я переменная, неограниченная по знаку (свободная).

С точки зрения 2-го игрока игру задача имеет вид

$$\begin{aligned} V &\rightarrow \min ; \\ \sum_{j=1}^n a_{ij} y_j &\leq V, \quad i = 1, \dots, m ; \\ \sum_{j=1}^n y_j &= 1, \quad y_j \geq 0; \quad j = 1, \dots, n . \end{aligned}$$

Причем обе эти задачи представляют собой пару двойственных задач линейного программирования: решив одну из них, можем найти смешанные стратегии обоих игроков.

#### Порядок выполнения работы

1. Сделать формальную постановку задачи.

2. Определить множество возможных стратегий игроков, при этом по возможности исключить эквивалентные стратегии.
3. Выписать матрицу игры.
4. Найти оптимальные стратегии игроков, используя симплекс-метод.

### Индивидуальные задания

#### 1. Морра

Игроки одновременно показывают один или два пальца, и в тот же момент каждый из игроков называет число. Если число, названное одним из игроков, совпадает с общим числом пальцев, показываемых обоими игроками, то игрок получает со своего противника выигрыш, равный этому числу.

#### 2. Игра А,В,С

Тасуется колода, состоящая из трех карт: А,В,С, и каждому из двух игроков дается по одной карте. Посмотрев свою карту, I-й игрок делает предположение относительно того, какая карта у II-го игрока.. Посмотрев на свою карту и услышав предположение I-го игрока, II-й игрок также пытается угадать карту I-го. Если какой-либо из игроков угадывает правильно, другой платит ему 1\$.

#### 3. Упрощенный покер

Первый игрок получает одну из карт Ст и Мл с равными вероятностями, а затем может или "сделать ставку" или "спасовать". Если первый делает ставку, то второй может "спасовать" и потерять  $\alpha$  или "уравнять игру", и выиграть или потерять  $\beta$  в зависимости от того, имеется ли на руках у первого игрока карта Мл или Ст. Если первый игрок пасует, то второй может также пасовать, что дает выигрыш 0, или сделать ставку, выигрывая  $\alpha$ , если у первого игрока карта Мл, и теряя  $\beta$ , если у первого игрока Ст.

#### 4. О шарах

Известно, что в урне находятся два шара, каждый из которых либо белый, либо черный. Игрок должен определить, сколько там черных шаров. Если его предположение правильно, ему должно быть уплачено  $\alpha$ ; если его ответ отличается от правильного на 1 (например, он указывает 1, когда в действительности 2 черных шара, или указывает 2, когда в действительности один шар, и т.д.), то ему должно быть уплачено  $\beta$ ; если ответ отличается от правильного на 2, то ему должно быть уплачено  $\gamma$ , причем  $\alpha \geq \beta \geq \gamma$ . Стоимость исследования одного шара равна  $\delta$ .

Рассмотреть не менее 3 разных вариантов  $\alpha, \beta, \gamma$

#### 5. Задача о рекламе

Две конкурирующие компании осуществляют пассажирские авиаперевозки из Москвы в Магадан. Для увеличения доли пассажиров у них есть 4 варианта рекламы: в газете, на радио, на телевидении и в интернете. Доля охвата целевой аудитории для каждого вида рекламы составляет, соответственно, 0.2, 0.4, 0.7 и 0.25. Количество потенциальных пассажиров составляет около 10000 человек в год. Вероятность того, что человек, услышав рекламу конкретной компании, воспользуется ее услугами равна 0.01. Требуется определить оптимальные рекламные стратегии компаний.

#### 6. Игральные кости

2 игрока бросают игральные кости. Каждый игрок может бросить одну, две или три кости. Если игрок бросает одну кость, то его сумма равна числу очков, которые выпали на кости, умноженному на 3. Если игрок бросает 2 кости, то его сумма равна числу очков на обеих костях, умноженной на 1.5. Если игрок бросает 3 кости, то его сумма равна числу очков на трех костях. Выигрывает тот, у кого сумма больше.

#### 7. Война между синими и красными.

Генерал синих хочет занять город красных, имея 3 роты. К городу можно подойти по одной из трех дорог. Генерал синих каждую свою роту может послать по любой из

дорог. Генерал красных располагает 6 ротами и может приказать любой роте оборонять любую дорогу. Синие займут город в том случае, если на одной из дорог у них будет больше рот, чем у красных. При этом синие получают 1, а красные — -1. Если синие не займут город, то выигрыши составят -1 и 1 соответственно.

8. Упрощенная игра в «21»

Колода карт состоит из 30 карт: 10 «шестерок», 10 «пятерок» и 10 «четверок». Два игрока вытаскивают по 3 карты. После этого каждый игрок может взять дополнительно одну или две карты. После этого они открывают карты, и выигрывает тот, у кого сумма очков больше, но не более 21. Результат игры рассчитывается как разность между количеством очков выигравшего и проигравшего игроков по модулю.

9. Государство и налогоплательщик

Рассмотрим игру, в которой участвуют государство и налогоплательщик. Доход налогоплательщика равен 4 единицам. Государство выбирает уровень подоходного налога: высокий ( $B=50\%$ ) средний ( $C=35\%$ ) либо низкий ( $H=25\%$ ). Налогоплательщик может честно заплатить налог, а может уклониться от его уплаты. Если он решает не платить налоги, то с некоторой вероятностью налоговые органы обнаруживают это и заставляют его заплатить весь налог и дополнительно внести в казну штраф в размере 1 единица. Выигрыш государства – это ожидаемый объем налоговых поступлений минус затраты на содержание налоговых органов, а выигрыш налогоплательщика – его ожидаемый доход (после уплаты всех налогов и штрафов). Определите оптимальные стратегии государства и налогоплательщиков. На содержание налоговых органов выделяется сумма 1 единица, чтобы обеспечить вероятность обнаружения неплательщика 75%, 0.5 единицы, чтобы обеспечить вероятность обнаружения неплательщика 50% и 0.2 единицы, чтобы обеспечить вероятность обнаружения неплательщика 25%.

10. Упрощенный «Морской бой»

Первый игрок располагает один двухпалубный корабль на поле  $3 \times 3$ . Второй игрок совершает выстрелы по полю противника, пытаясь потопить вражеский корабль. За каждый выстрел второй игрок уплачивает первому 1\$. После первого попадания (ранения корабля) первый игрок уплачивает первому 2\$, после второго попадания (окончательного поражения) – 3\$.

## 9.2. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины

Для успешного освоения материала дисциплины «Методы оптимальных решений» рекомендуется регулярно посещать и конспектировать лекции, полностью выполнять задания лабораторных работ, тщательно готовить презентации, активно использовать возможности предоставляемых консультаций, проводимых еженедельно преподавателями дисциплины.

Решение задачи должно завершаться четким и кратким ответом на поставленный в задании вопрос. Рекомендуется проведение проверки полученного решения, поскольку большое количество арифметических ошибок приводит к снижению общей оценки работы. Положительно оценивается (но меньшим количеством баллов) не полностью выполненное задание: засчитываются все правильно выполненные действия.

При выполнении домашнего задания, посвященного решению задачи линейного программирования, требуется использовать компьютерную программу, которая позволяет проводить анализ чувствительности. В частности, рекомендуется использовать оптимизатор MS Excel.

### Аннотация дисциплины

Дисциплина реализуется в ИЭУП РГГУ на экономическом факультете кафедрой моделирования в экономике и управлении.

Содержание дисциплины охватывает круг вопросов, связанных с применением методов оптимизации при анализе и решении широкого спектра экономических задач.

**Цель дисциплины:** развить системное мышление слушателей путем изучения подходов к экономико-математическому моделированию и сравнительного анализа разных типов моделей.

**Задачи дисциплины:**

- ознакомить слушателей с математическими свойствами моделей и методов оптимизации, которые могут использоваться при анализе и решении широкого спектра экономических задач;
- выработать у слушателей навыки проведения численных исследований математических моделей и анализа результатов вычислений;
- научить выбирать наиболее перспективное управляющее решение.

Дисциплина направлена на формирование следующих компетенции выпускника:

**ОПК-2:**

Способен осуществлять сбор, анализ и использование данных хозяйственного, налогового и бюджетного учетов, учетной документации, бухгалтерской(финансовой), налоговой и статистической отчетности в целях оценки эффективности и прогнозирования финансово-хозяйственной деятельности хозяйствующего субъекта, а также выявления, предупреждения, локализации и нейтрализации внутренних и внешних угроз и рисков

В результате освоения дисциплины обучающийся должен:

**Знать:**

- принципы применения математических методов и информационных технологий для принятия управленческих решений на хозяйственно-экономических объектах;
- современные концепции и представления о социально-экономических критериях при принятии управленческих решений.

**Уметь:**

- использовать современные информационные технологии для обработки экономических данных и анализа результатов расчетов;
- выбирать рациональные варианты действий в практических задачах принятия решений с использованием экономико-математических моделей.

**Владеть:**

- навыками применения современного математического инструментария для решения задач социально-экономического содержания;
- навыками разработки решений и способами их обоснования в условиях риска и неопределенности.

По дисциплине предусмотрена промежуточная аттестация в форме зачёта с оценкой.

Общая трудоемкость освоения дисциплины составляет 3 зачетных единицы, 108 часов.